理论计算机科学基础
期中整理

郭嘉睿
ntguojiarui@pku.edu.cn

2022 年 1 月 16 日

0 预备知识

在本文档中，字母表 Σ 定义为任意非空有穷集合，字符串由字母表中若干字母组成，串长度定义为串所包含的字母数，用 $|\cdot|$ 表示，子串定义为串中连续长度的一段，

$$\Sigma^* = \{x|x\text{为}\Sigma\text{上的有穷长度的串}\},$$
$$\Sigma^+ = \{x|x\text{为}\Sigma\text{上的正有穷长度的串}\},$$
$$\Sigma^\infty = \{x|x\text{为}\Sigma\text{上的无穷长度的串}\},$$

语言定义为串的集合 $A \subseteq \Sigma^*$，空语言定义为空集 $\varnothing$.

1 正则语言

定义 1.1 (DFA)**.** 有穷自动机是一个五元组 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$，其中，$Q$ 为有穷状态集，Σ 为输入字母表，$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ 为转移函数，$q_0 \in Q$ 为初始状态，$F \subseteq Q$ 为接收状态集.

定义 1.2 (正则语言)**.** 有穷自动机 M 接受的语言称为正则语言，用 $L = L(M)$ 表示.

定义 1.3 (正则运算)**.** 设 A, B 是两个语言，正则运算是指

1. 并：$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$;
2. 连接：$AB = \{xy|x \in A \wedge y \in B\}$;
3. 星号：$A^* = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A^k = \{x_1 \cdots x_k | k \geq 0, x_i \in A\}$.

定义 1.4 (NFA)**.** 非确定性有穷自动机是一个五元组 $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$，其中，$Q$ 为有穷状态集，Σ 为输入字母表，$\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$，$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to P(Q)$ 为转移函数，$q_0 \in Q$ 为初始状态，$F \subseteq Q$ 为接收状态集.

对于非确定性有穷自动机，N 接受 w 当且仅当存在接受计算。

定理 1.5 (NFA 和 DFA 的等价性)**.** 每个 NFA 都有等价 DFA.

证明. 思路：构造等价 DFA，对于 NFA 的 k 个状态，用 DFA 的 2^k 个状态去模拟。 □

定义 1.6 (REX)**.** R 是正则表达式，当且仅当 R 是 (递归定义)

1. $a, a \in \Sigma$;

2. ε;

3. $\varnothing$;

4. $R_1 \cup R_2$，R_1, R_2 都是正则表达式；

5. $R_1 R_2$，R_1, R_2 都是正则表达式；

6. R_1^*，，R_1 是正则表达式；

这里，运算优先级规定为 $* > \cdot > \cup$.

定理 1.7 (REX 与正则语言的等价性)**.** 一个语言是正则的当且仅当可用正则表达式描述该语言.

定理 1.8 (泵引理)**.** 设 A 是正则语言，则存在常数 p，s.t. 若 $s \in A$ 且 $|s| \geq p$，则 $s = xyz$，且满足以下条件：

1. $\forall i \geq 0, xy^i z \in A$;

2. $|y| > 0$;

3. $|xy| \leq p$.

2 上下文无关语言

定义 2.1 (CFG)**.** 上下文无关文法是一个四元组 $G = (V, \Sigma, R, S)$，其中，V 为有穷变元集，Σ 为有穷终结符集，R 为有穷规则集 (规则形如 $A \to w, w \to (V \cup \Sigma)^*$)，$S \in V$ 是一个初始变元.

定义 2.2 (CFL)**.** 上下文无关文法生成的语言称为上下文无关语言，用 $L = L(G)$ 表示.

定理 2.3. 正则语言都是 CFL.

定义 2.4 (CNF)**.** 称一个 CFG 为 Chomsky 范式，若它的每一条规则都具有如下形式：

1. $S \to \varepsilon$;

2. $A \to BC$;

3. $A \to a$.

这里，A, B, C 是任意变元，B, C 不是初始变元，a 是任意终结符.

定理 2.5. 任何 CFG 都有等价 CNF.

定义 2.6 (PDA)**.** 下推自动机是一个六元组 $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$，其中，$Q$ 为有穷状态集，Σ 为输入字母表，$\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$，$\Gamma$ 为栈字母表，$\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \{\varepsilon\}$，$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to P(Q \times \Gamma_\varepsilon)$ 为转移函数，$q_0 \in Q$ 为初始状态，$F \subseteq Q$ 为接收状态集.

定理 2.7. 一个语言是 CFL 当且仅当存在 PDA 识别它.

定理 2.8 (泵引理)**.** 设 A 是上下文无关语言，则存在常数 p，s.t. 若 $s \in A$ 且 $|s| \geq p$，则 $s = uvxyz$，且满足以下条件：

1. $\forall i \geq 0, uv^i xy^i z \in A$;

2. $|vy| > 0$;

3. $|vxy| \leq p$.

3 图灵机

定义 3.1 (TM)**.** 单带图灵机是一个七元组 $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\mathrm{acc}},q_{\mathrm{rej}})$，其中，$Q$ 为有穷状态集，Σ 为输入字母表，空格符 $\mathrm{B}\notin\Sigma$，Γ 为带字母表，$\Sigma\cup\mathrm{B}\subseteq\Gamma$，$\delta:Q\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\{\mathrm{L},\mathrm{R}\}$ 为转移函数，$q_0\in Q$ 为初始状态，q_{acc} 为停机接受状态，q_{rej} 为停机拒绝状态，$q_{\mathrm{acc}}\neq q_{\mathrm{rej}}$.

对于图灵机，它的计算结果包括停机接受、停机拒绝和不停机.

	可判定 (可计算)	可识别 (半可计算)	补可识别 (补半可计算)
$x\in A$	停机接受	停机接受	停机接受/不停机
$x\notin A$	停机拒绝	停机拒绝/不停机	停机接受

定理 3.2. 图灵可识别等价于图灵可枚举.

证明. $\Rightarrow$：枚举 Σ^* 逐个识别. 利用楔形，定义 $A_i=\{w|w\text{运行}i\text{步后接受}\}$，则 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$；
$\Leftarrow$：逐个枚举等待出现. □

定理 3.3 (CSL)**.** 给定一台图灵机，它的所有接受计算历史的集合构成上下文有关语言.

定义 3.4 (LBA)**.** 线性界限自动机是一台带头不能移出输入区的图灵机（等价于带头不能移出输入区的常数倍）.

定理 3.5. 一个语言是 CSL 当且仅当存在 LBA 识别它.

4 归约，(不) 可计算性

定义 4.1 (m 归约)**.** 设 A,B 是语言，若存在可计算函数 $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$，s.t.$x\in A\Leftrightarrow f(x)\in B$，则说语言 A 可以 m 归约到 B，记为 $A\leq_m B$ 或 $A\leq_m B$ via f.

定义 4.2 (Turing 归约)**.** 设 A,B 是语言，称 A 可以 Turing 归约到 B，若 A 相对于 B 可判定，记为 $A\leq_T B$.

4.1 正则语言的可判定性

定理 4.3 ($\mathrm{A_{DFA}}$)**.** $\mathrm{A_{DFA}}=\{\langle B,w\rangle|\text{DFA: }B\text{接受}w\}$ 可判定.

证明. 模拟 DFA 的判定过程，用 TM：M 模拟 B，跟踪 B 的状态. □

定理 4.4 ($\mathrm{E_{DFA}}$)**.** $\mathrm{E_{DFA}}=\{\langle B\rangle|\text{DFA: }B\text{不派生任何串}\}$ 可判定.

证明. 利用图的连通性. □

定理 4.5 ($\mathrm{EQ_{DFA}}$)**.** $\mathrm{EQ_{DFA}}=\{\langle A,B\rangle|\text{DFA: }A,B,L(A)=L(B)\}$ 可判定.

证明. 只要判定 $L(A)\bigoplus L(B)=(L(A)-L(B))\cup(L(B)-L(A))$ 是否为空，而正则语言对布尔运算封闭. □

4.2 上下文无关语言的可判定性

定理 4.6 ($\mathrm{A_{CFG}}$)**.** $\mathrm{A_{CFG}}=\{\langle G,w\rangle|\text{CFG: }G\text{派生}w\}$ 可判定.

证明. 利用 Chomsky 范式，一个长度为 n 的串必定通过 $2n-1$ 次派生得到. □

定理 4.7 ($\mathrm{E_{CFG}}$)**.** $\mathrm{E_{CFG}}=\{\langle G\rangle|\text{CFG: }G,L(G)=\varnothing\}$ 可判定.

证明. 利用 Chomsky 范式，依次检查每个变元是否产生终结符串. □

定理 4.8 ($\mathrm{ALL_{CFG}}$)**.** $\mathrm{ALL_{CFG}} = \{\langle G\rangle | \text{CFG: } G, L(G) = \Sigma^*\}$ 不可判定.

证明. 利用 $\overline{\mathrm{A_{TM}}} \leq_m \mathrm{ALL_{CFG}}$，由于 TM 的非接受计算历史的集合构成 CFL，对于 TM：A 和串 w，若 A 接受 w，则它的非接受计算历史的集合不为 Σ^*；若 A 不接受 w，则它的非接受计算历史的集合为 Σ^*. 因此，检查 A 的非接受计算历史的集合 B 是否为 Σ^* 可以判定 A 是否接受 w，从而 $\overline{\mathrm{A_{TM}}} \leq_m \mathrm{ALL_{CFG}}$. 由于 $\mathrm{A_{TM}}$ 不可判定，故 $\mathrm{ALL_{CFG}}$ 也不可判定. □

定理 4.9 ($\mathrm{EQ_{CFG}}$)**.** $\mathrm{EQ_{CFG}} = \{\langle G, H\rangle | \text{CFG: } G, H, L(G) = L(H)\}$ 不可判定.

证明. 构造 $L(H) = \Sigma^*$，则判定 G 是否与 H 等价可以判断 $L(G)$ 是否为 Σ^*，从而 $\mathrm{ALL_{CFG}} \leq_m \mathrm{EQ_{CFG}}$. □

4.3 图灵机的可判定性

图灵机的所有问题几乎都是不可判定的.

定理 4.10 ($\mathrm{A_{TM}}$)**.** $\mathrm{A_{TM}} = \{\langle M, w\rangle | \text{TM: } M\text{接受}w\}$ 不可判定.

证明. 利用对角线法则，将每个 TM 化为一个串. 定义

$$\mathrm{D_{TM}} = \{\langle M\rangle | \text{TM：} M\text{接受}M\}.$$

设计 TM：U，

$$U(M, M) = \begin{cases} \text{接受}, & \text{若}M\text{拒绝}M; \\ \text{拒绝}, & \text{若}M\text{接受}M. \end{cases}$$

检查 $U(U, U)$，有 U 接受 $U \Leftrightarrow U$ 拒绝 U，矛盾! □

定理 4.11 (Rice 定理)**.** 若 S 是非平凡的指标集 (不为 $\varnothing, \Sigma^*$)，则 S 不可判定. 这里，指标集是指，$\langle M_1\rangle \in S, L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow \langle M_2\rangle \in S$.

证明. 取一个 TM：M_0，s.t. $L(M_0) = \varnothing$. 对于任意一台 TM：M’，

1. 若 $M_0 \in S$，取 $M_1 \notin S$，对于 $\langle M, w\rangle$，若 M 接受 w，则 $L(M') = L(M_1)$，否则拒绝所有输入 $L(M') = \varnothing = L(M_0)$. 从而判定 $M' \in S$ 可以解决 $\overline{\mathrm{A_{TM}}}$，故 $\overline{\mathrm{A_{TM}}} \leq_m S$；
2. 若 $M_0 \notin S$，取 $M_1 \in S$，对于 $\langle M, w\rangle$，若 M 接受 w，则 $L(M') = L(M_1)$，否则拒绝所有输入 $L(M') = \varnothing = L(M_0)$. 从而判定 $M' \in S$ 可以解决 $\mathrm{A_{TM}}$，故 $\mathrm{A_{TM}} \leq_m S$.

无论如何，我们都得到了矛盾，所以 S 不可判定. □

4.4 上下文有关语言的可判定性

定理 4.12 ($\mathrm{A_{LBA}}$)**.** $\mathrm{A_{LBA}} = \{\langle M, w\rangle | \text{LBA：} M\text{接受}w\}$ 可判定.

证明. 给定 $\langle M, w\rangle$，状态数 q、符号数 g、长度 n 均有限，格局至多有 qng^n 个，可以检测死循环. □

定理 4.13 ($\mathrm{E_{LBA}}$)**.** $\mathrm{E_{LBA}} = \{\langle M\rangle | \text{LBA：} M, L(M) = \varnothing\}$ 不可判定.

证明. TM 的接受计算历史构成上下文有关语言. 对于图灵机 M 及其输入 w，LBA：M' 及其输入 x，检查 x 是否为 M 在 w 上的接受计算历史，若是则接受，否则拒绝. 从而 $\langle M, w\rangle \in \overline{\mathrm{A_{TM}}} \Leftrightarrow \forall y, y$ 不是 M 在 w 上的接受计算历史 $\Leftrightarrow L(M') = \varnothing$，因此 $\overline{\mathrm{A_{TM}}} \leq_m \mathrm{E_{LBA}}$. □

总结：见下表，

	DFA	CFG	LBA	TM
接受性	Y	Y	Y	N
空性	Y	Y	N	N
等价性	Y	N		N
停机			Y	N
正则性				N

5 总结

定理 5.1 (递归定理)**.** 设 TM：T，可计算函数 $t : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$，则存在 TM：R，可计算函数 $r : \Sigma^* \to \Sigma^*$，s.t. $r(w) = t(\langle R\rangle, w)$.

定理 5.2 (不动点定理)**.** $\forall$ 可计算函数 t，$\exists$ TM：F，s.t.$L(t(\langle F\rangle)) = L(F)$.

定理 5.3 (递归定理的不动点形式)**.** $\forall$ 可计算函数 $t : \Sigma^* \to \Sigma^*$，$\exists$ TM：F，s.t. $t(\langle F\rangle)$ 与 F 等价.

关于语言的分类 (均不属于更低一层)：

正则	0^*1^*
CFL	0^n1^n,ww^R, 非 ww^R, 非 ww，非接受计算历史
CSL	$0^n1^n2^n$,ww, 接受计算历史
可判定	$\mathrm{A_{LBA}}$, $\mathrm{E_{CFG}}$, $\mathrm{EQ_{DFA}}$
图灵可识别	$\mathrm{A_{TM}}$, $\mathrm{HALT_{TM}}$, PCP, $\overline{\mathrm{EQ_{CFG}}}$

语言的封闭性，这里，$\mathrm{RC}(L) = \{xy|yx \in L\}$，同态是指：对于函数 $f : \Sigma \to \Gamma^*$，$f(L) = \{f(x_1)\cdots f(x_n)|x_1\cdots x_n \in L\}$，$\mathrm{CUT}(L) = \{yxz|xyz \in L\}$，$\mathrm{L}_{\frac{1}{2}-}(L) = \{x|\exists y, xy \in L\}$，对 $\leq$ 封闭是指 $A \leq B, B \in S \Rightarrow A \in S$.

	正则	CFL	CSL	可判定	图灵可识别	补图灵可识别
交	Y	N1	Y	Y	Y	Y
并	Y	Y	Y	Y	Y	Y
补	Y	N2	Y	Y	N	N
连接	Y	Y	Y	Y	Y	Y
星号	Y	Y	Y	Y	Y	Y
RC	Y3	Y		Y	Y	Y
同态	Y	Y4		N5	Y	Y
CUT	Y	N		Y	Y	Y
$\mathrm{L}_{\frac{1}{2}-}$	Y	N		Y	Y	Y
$\leq_m$	N6	N		Y	Y	Y
$\leq_T$	N	N		Y	N	N

其中一些结论的证明：

1. 考虑 $0^n1^n2^m$ 和 $0^m1^n2^n$，它们都是 CFL，但他们的交 $0^n1^n2^n$ 不是 CFL.
2. 利用 De Morgen 律，$A \cap B = (A' \cup B')'$，若补封闭则交也封闭.
3. 利用 NFA 猜.
4. 在 Chomsky 范式中作替换.

5. 由于 $L \in \Sigma^1 \Leftrightarrow L = \{x | \exists y, (x, y) \in C\}$，这里 C 是可计算语言. 对于 (x, y)，它是可计算的. 为所有的 y 更换新的字母表使之与 x 的字母表不交，然后构造同态：$f(x) = x, f(y) = \varepsilon$，此时新得到的语言是 Σ^1 的.

6. 对于任何一个可识别的语言 A，输出 1 若接受，输出 0 若拒绝，则 $A \leq_m \{0, 1\}$.

理论计算机科学基础
期末整理

郭嘉睿
ntguojiarui@pku.edu.cn

2022 年 1 月 16 日

7 时间复杂度

定理 7.1. 设 $t(n) \geq n$, 则每个 $t(n)$ 时间多带 TM 都与某个 $O(t^2(n))$ 时间单带 TM 等价.

定理 7.2. 设 $t(n) \geq n$，则每个 $t(n)$ 时间单带 NTM 均与某个 $2^{O(t(n))}$ 时间 DTM 等价.

定义 7.3 (NP)**.** NP 的两个等价定义：

$$\mathrm{NP} = \{L|L\text{有多项式时间验证机}\} = \{L|\text{某个多项式时间 NTM 判定}L\}.$$

定理 7.4 (Cook 定理)**.** 任何 NP 语言均可在多项式时间内归约到 cnf-SAT.

一些 NPC 问题及它们的归约：

1. 3SAT, SAT: 通过 cnf-SAT 归约;
2. CLIQUE, VC, HAMPATH, SUBSET-SUM: 通过 3SAT 归约;

8 空间复杂度

定理 8.1 (Savitch 定理)**.** 设 $f(n) \geq \log n$, 则 $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$.

推论: PSPACE = NPSPACE.

定理 8.2. 全带量词布尔公式问题 TQBF 是 PSPACE 完全的.

一些 PSPACE 完全问题: 公式博弈 FORMULA-GAME, 广义地理学游戏 GG.

定义 8.3 (亚线性空间)**.** 亚线性空间 TM 是指将 TM 的带分为一条输入带 (只读), 一条工作带 (读写) 和一条单向输出带 (只写, 禁止回头或修改), 且工作带的大小是亚线性的.

定理 8.4. PATH 是 NL 完全的.

定理 8.5. NL = coNL.

9 空间难解性

定理 9.1 (空间层次定理)**.** 对于任意空间可构造函数 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 存在语言 A, 在空间 $O(f(n))$ 内判定但不在空间 $o(f(n))$ 内判定.

定理 9.2 (时间层次定理)**.** 对于任意时间可构造函数 $t:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, 存在语言 A, 在时间 $O(t(n))$ 内判定但不在时间 $o\left(\frac{t(n)}{\log t(n)}\right)$ 内判定.

定理 9.3. $\mathrm{EQ}_{\mathrm{REX}\uparrow}$ 是 EXPSPACE 完全的.

定理 9.4. NONMIN-FORMULA$\in \mathrm{NP}^{\mathrm{SAT}}$.

定理 9.5 (对角化的局限性)**.** 存在语言 A,B, 使得 $\mathrm{P}^A\subset\mathrm{NP}^A$, $\mathrm{P}^B=\mathrm{NP}^B$.

定义 9.6 (ATM)**.** 交错式 TM(ATM) 是一种 NTM, 其计算树中的非确定性分支点包括全称和存在两类, 一个全称分支点接受当且仅当它所有儿子接受, 一个存在分支点接受当且仅当它至少一个儿子接受, 根接受则整个计算接受.

ATM 复杂性的结论: $\mathrm{P}=\mathrm{AL},\mathrm{PSPACE}=\mathrm{AP},\mathrm{EXP}=\mathrm{APSPACE}$.

定义 9.7 (电路族)**.** 一个电路族 C 是无穷个电路 $C=(C_0,C_1,\cdots,)$, 其中 C_n 有 n 个输入变量. 若对每个字符串 w, $w\in A\Leftrightarrow C_n(w)=1$, 其中 $|w|=n$, 则称 C 在 $\{0,1\}$ 上判定 A.

电路族的规模复杂性是 C 中的规模, 深度复杂性是 C 中从输入到输出的最长路径长度. $\mathrm{P/poly}=\mathrm{PSIZE}=\bigcup\limits_k \mathrm{SIZE}(n^k)$.

定理 9.8. $\mathrm{TIME}(t(n))\subseteq\mathrm{SIZE}(O(t^2(n)))$. 进一步, $\mathrm{P}\subseteq\mathrm{PSIZE}$.

定理 9.9. 电路可满足性问题 CIRCUIT-SAT 是 NP 完全的.

定理 9.10 (Karp-Lipton 定理)**.** $\mathrm{NP}\subseteq\mathrm{P/poly}\Leftarrow\mathrm{PH}=\Sigma_2\mathrm{P}$.

定义 9.11 (对数空间一致性)**.** 一个布尔电路族 $(C_1,\cdots)$ 是对数空间一致的, 当且仅当存在一个对数空间 TM: T, 当输入 1^n 时, T 输出 $\langle C_n\rangle$.

定义 9.12 (NC 类)**.** NC 类是指多项式规模, 对数多项式规模深度的电路. 更一般的, NC^k 类是指多项式规模, $O(\log^k n)$ 深度的电路.

定理 9.13. CIRCUIT-VALUE(CVP) 是 P 完全的.

10 复杂性高级专题

定义 10.1 (PP)**.** PP 指错误概率 $\varepsilon=0.5$, 在多项式时间内运行的概率算法.

定义 10.2 (BPP)**.** BPP 指错误概率 $\varepsilon=0.5-\delta$(其中 δ 是任意常数), 在多项式时间内运行的概率算法.

定义 10.3 (RP)**.** RP 指错误概率 $\varepsilon=0.5-\delta$(其中 δ 是任意常数), 在多项式时间内运行且只出现弃真型错误的概率算法.

定义 10.4 (coRP)**.** coRP 指错误概率 $\varepsilon=0.5-\delta$(其中 δ 是任意常数), 在多项式时间内运行且只出现取伪型错误的概率算法.

定义 10.5 (ZPP)**.** ZPP 指错误概率 $\varepsilon=0$, 期望运行时间为多项式时间的概率算法 (或: 在多项式时间内运行, 但允许 3 种输出 0, 1, ? 的概率算法).

它们之间的关系:

1. $\mathrm{ZPP}\subseteq\mathrm{RP}\cap\mathrm{coRP}\subseteq\mathrm{RP}\cup\mathrm{coRP}\subseteq\mathrm{BPP}\subseteq\mathrm{PP}$.
2. $\mathrm{BPP}\subseteq\mathrm{PSIZE}$(利用加强引理证明).
3. $\mathrm{BPP}\subseteq\Sigma_2\mathrm{P}\cap\Pi_2\mathrm{P}$.
4. $\mathrm{PH}\subseteq\mathrm{P}^{\mathrm{PP}}$.

11 一些没什么用的东西

一些语言的接受性/空性/满性/等价性的复杂度:

	A	E	ALL	EQ
DFA	L	NL 完全	P	PSPACE
NFA	NL 完全	NL 完全	PSPACE 完全	
PDA	至少 NL 完全		不可判定	不可判定
LBA	PSPACE 完全	不可判定	不可判定	不可判定
TM	不可判定	不可判定	不可判定	不可判定

运算封闭性 (Y 表示封闭, 表格中的条件表示在该操作下封闭当且仅当这一条件为真):

	P	NP	coNP	EXP
$\cap$	Y	Y	Y	Y
$\cup$	Y	Y	Y	Y
$\sim$	Y	P=NP	P=NP	Y
$\cdot$	Y	Y	Y	Y
$*$	Y	Y	Y	Y
同态	P=NP	Y		
$L_{\frac{1}{2}-}$	P=NP	Y		Y
RC	Y	Y	Y	Y
CUT	Y	Y	Y	Y